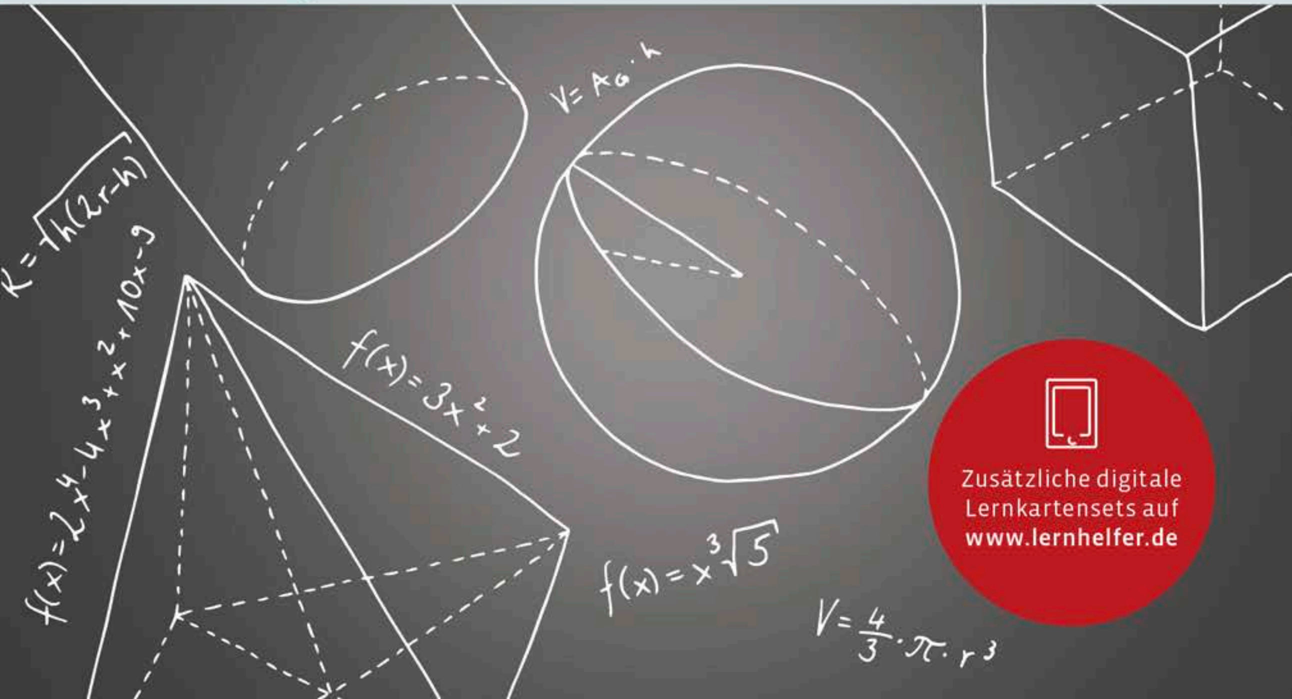
10. Klasse • Mathematik

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

10. Klasse
Mathematik

Dein Weg zu besseren Noten!



Zusätzliche digitale Lernkartensets auf www.lernhelfer.de

Schlaue Schnipsel

2 = 1? Wo ist der Fehler?

Zwei Zahlen **a** und **b** sollen gleich sein: **a = b**

Daher ist:

$a^2 = a \cdot b \quad | - b^2$

$a^2 - b^2 = a \cdot b - b^2 \quad$ | links: 3. bin. Formel, rechts: b ausklammern

$(a + b)(a - b) = b(a - b) \quad | : (a - b)$

$a + b = b$

wegen **a = b** gilt:

$b + b = b$

$2 = 1$

Der Fehler passiert im 3. Schritt: Da **a = b** ist, ist **(a – b) = 0**. Durch **0** darf man aber nicht dividieren!

Winkelzüge macht jemand, wenn er versucht, sein Ziel durch undurchschaubare, evtl. auch illegale Tricks zu erreichen.

Starker Muskel

Etwa 2,5 Milliarden Mal wird dein Herz an deinem 80. Geburtstag geschlagen haben.

Sprechende Zahlen

Keine zehn Pferde bringen dich in eine Geisterbahn, wenn du leicht schreckhaft bist und dort niemals hingehen würdest.
An zehn Fingern abzählen kannst du dir, was passiert, wenn du es dir schon leicht denken kannst.

Auf einen **gemeinsamen Nenner** kommen mehrere Personen, wenn sie unterschiedlicher Meinung sind, aber einen Kompromiss finden, mit dem alle einverstanden sind.

Fabelhafte 4

4 Jahreszeiten, 4 Himmelsrichtungen, 4 Elemente, Viertelstunden …
Die Umwelt wird offenbar gern in vier Teile geteilt. Das ist jedoch nicht überall so. So gibt es in der chinesischen Kultur 5 Elemente, in den Tropen und Subtropen gibt es mit Trocken- und Regenzeit 2 Jahreszeiten, während die skandinavischen Samen sogar 8 Jahreszeiten kennen.

Wer war Adam Riese?

Mit den Worten „Nach Adam Riese kommt 5 heraus“, betonst du, dass du richtig gerechnet hast. Adam Ries lebte im 16. Jahrhundert und verfasste Rechenbücher – und zwar auf Deutsch; und nicht, wie damals üblich, auf Latein.
Daher konnten sich seine Bücher weit verbreiten. Adam Ries trug entscheidend dazu bei, dass wir heute nicht mehr mit römischen Zahlen rechnen.

So lernst du mit diesem Buch:

WISSEN

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen
In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

ÜBEN

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:

Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs

Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit

Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

WISSEN +
Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Arbeitshinweise für das Bearbeiten der Übungen.

TESTEN

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

KLASSENARBEIT 1
Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.

60 Minuten
Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

Topthema im Schnellcheck:
Hier findest du wichtige Lernthemen zum schnellen Nachschlagen und Wiederholen.

LERNTIPP

Mathematik praktisch anwenden

Die Sache verstehen

- Überlege bei einer praktischen Aufgabenstellung zunächst, worum es geht. Welche Informationen liegen vor? Was ist gesucht? Welche Formel lässt sich anwenden?
- Oft musst du dir praktische Fragen zuerst geschickt zurechtlegen, damit du die Antwort berechnen oder konstruieren kannst. Dieses „Zurechtlegen" nennt man Mathematisieren oder Modellieren.

Eine Bakterienkultur hat in einem Versuch ihre Größe in 2 Stunden verdoppelt. Zu Beginn eines neuen Experimentes ist sie 3 cm² groß. Wie lange dauert es, bis sie sich über 70 m² verbreitet hat?

Gegeben: 1. Fläche der Kultur zu Beginn: 3 cm²; 2. beobachtete Veränderung: Verdopplung in 2 Stunden. Gesucht: Zeit, nach der die Kultur auf 700 000 cm² angewachsen ist.

Modellieren

- 1. Zunächst musst du dir überlegen, mit welchem mathematischen Modell du die Beziehung zwischen den Zahlen treffend beschreiben kannst. Wie lässt sich der Sachverhalt in eine Formel übertragen?

  Eine Vorstellung davon bekommst du z. B. durch die Darstellung in Tabellen und Diagrammen. Daran kannst du auch ablesen, ob deine Formel plausibel ist.
- 2. Setze die Zahlen nun in dein Modell ein und berechne das Ergebnis.

Zeitabschnitt x	0	1	2	3	...
Zeit t(x) in h	0	2	4	6	...
Größe G(x) in cm²	3	6	12	24	...

Die Zeitdauer t steht mit dem Zeitabschnitt x in einem linearen Zusammenhang: $t(x) = 2x$

Die Größe G steht mit dem Zeitabschnitt x in einem exponentiellen Zusammenhang: $G(x) = 3 \cdot 2^x$

$700\,000 = 3 \cdot 2^x$, also
$x \approx 18$ und $t(x) \approx 36$

Interpretieren

- Jetzt kommt es darauf an, das Ergebnis zu interpretieren: Was bedeutet dein Ergebnis für den Sachverhalt? Was fällt dir (am Modell, am Ergebnis, an der Rechnung) auf? Welchen Einfluss hat es, wenn sich eine Ausgangsgröße verändert?

Nach ca. 36 Stunden hat die Bakterienkultur die Größe von 70 Quadratmetern.

Während sie anfangs langsam wächst, beschleunigt sich das (exponentielle) Wachstum immer mehr.

Durch eine veränderte Ausgangsfläche ändert sich die Dauer nur unwesentlich.

Kritisch argumentieren

- Wichtig ist am Schluss die Beurteilung des Modells. Sei kritisch!
- Welche Informationen bietet es für den Sachverhalt? Ist das errechnete Resultat überzeugend? Welche Einflussfaktoren müssen zusätzlich bedacht werden?

Die Grundannahme, dass sich die Fläche der Bakterienkultur immer in derselben Zeit verdoppelt, ist nicht plausibel. Die Fläche wächst nur „an den Rändern", sodass das Modell in der Realität nicht für beliebig große Flächen anwendbar ist.

Duden

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

10. Klasse

Mathematik

4., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

 D C B A
Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung Constanze Schöder
Redaktion Dr. Wiebke Salzmann
Autoren Karin Hantschel, Katja Roth, Lutz Schreiner, Michaela Stein, Dr. Wiebke Salzmann (Klappe)

Herstellung Uwe Pahnke
Layout Bachmann Design, Weinheim
Umschlaggestaltung Büroecco, Augsburg; Bachmann Design, Weinheim
Umschlagabbildung Selina Bauer, Berlin

Satz LemmeDESIGN, Berlin
Druck und Bindung AZ Druck und Datentechnik GmbH
Heisinger Straße 16, 87437 Kempten
Printed in Germany

ISBN 978-3-411-72584-7
Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91232-2

www.duden.de

Inhaltsverzeichnis

1 Quadratische Gleichungen und Funktionen

1.1 Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Eine Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung. Jede quadratische Gleichung kann in die **Normalform** übergeführt werden, indem jeder Summand durch a dividiert wird. **Normalform:** $x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ Division durch a ergibt $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Vereinfachen der Koeffizienten $\frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$ führt auf die Normalform. allgemeine Form: $5x^2 + 10x + 5 = 0 \;\vert : 5$ Normalform: $x^2 + 2x + 1 = 0$
Die **Gleichung $x^2 = 0$** hat nur eine (doppelte) Lösung $x_1 = x_2 = 0$, d. h., $L = \{0\}$	
Rein quadratische Gleichungen: Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 - q = 0;\ q > 0}$ durch „Wurzelziehen“ lösen: $x^2 - q = 0 \;\vert$ 3. binomische Formel $\left(x + \sqrt{q}\right)\left(x - \sqrt{q}\right) = 0$ $x_1 = \sqrt{q}$; $x_2 = -\sqrt{q}$ d. h., $L = \left\{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\right\}$ Eine Abkürzung zu diesem Weg findest du im Wissen⁺-Kasten auf S. 7. *Merke:* Falls $q < 0$, gibt es keine Lösung.	$x^2 - 9 = 0$ $x^2 - 3^2 = 0$ $(x + 3) \cdot (x - 3) = 0$ $x_1 = -3$; $x_2 = 3$; d. h., $L = \{-3; 3\}$ **3. binomische Formel** $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ Die Gleichung $x^2 + 9 = 0$ hat keine Lösung; denn sie ist gleichbedeutend mit $x^2 = -9$ und die Wurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert.
Gemischt quadratische Gleichungen: Gleichungen der Form $\mathbf{x^2 + px = 0}$ durch Faktorisieren („Ausklammern“) lösen: $x^2 + px = 0$ $x \cdot (x + p) = 0$ $x = 0$ oder $x + p = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -p$; d. h., $L = \{0; -p\}$	$4x^2 + 12x = 0 \;\vert : 4$ $x^2 + 3x = 0$ $x \cdot (x + 3) = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -3$; d. h., $L = \{0; -3\}$

WISSEN

Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$ versucht man mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel umzuformen. Dies ist nur möglich, wenn

$q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$,

sonst muss man eine **quadratische Ergänzung** vornehmen. Dies geht so:

$x^2 + px + q = 0 \;|-q$

$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x = -q \;\;|+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ (quadrat. Ergänzung)

$x^2 + 2\cdot\frac{p}{2}\cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \,|$1. binom. Formel

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right] = 0 \;|$3. binom. Formel

$\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]\cdot\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] = 0$

Einer der Faktoren muss null sein:

$\left(x + \frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$ oder

$\left(x + \frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$

Es ergibt sich die Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung, die sogenannte **p-q-Formel,** mit der du quadratische Gleichungen in der Normalform lösen kannst:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$L = \{x_1; x_2\}$

$x^2 + 4x + 4 = 0 \;|$1. binom. Formel

$(x + 2)^2 = 0$

$(x + 2)\cdot(x + 2) = 0$

$L = \{-2\}$

1. binomische Formel

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

2. binomische Formel

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Löse die Gleichung $x^2 + 6x + 5 = 0$.

$x^2 + 6x + 5 = 0 \;|-5$

$x^2 + 2\cdot 3x = -5 \;|+3^2$ (quadrat. Ergänzung)

$x^2 + 2\cdot 3x + 3^2 = 3^2 - 5 \;|$1. binomische Formel

$(x + 3)^2 = 3^2 - 5$

$(x + 3)^2 - (3^2 - 5) = 0 \;|$3. binomische Formel

$[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\,]\cdot[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\,] = 0$

Einer der Faktoren muss null sein:

$[(x + 3) + \sqrt{3^2 - 5}\,] = 0$ oder

$[(x + 3) - \sqrt{3^2 - 5}\,] = 0$

$x_1 = -3 + \sqrt{3^2 - 5}$ $\quad$ $x_2 = -3 - \sqrt{3^2 - 5}$

$x_1 = -3 + \sqrt{4} = -1$ $\quad$ $x_2 = -3 - \sqrt{4} = -5$

$L = \{-1; -5\}$

Der Ausdruck unter der Wurzel

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = D$ heißt **Diskriminante.**

D „entscheidet" über die Anzahl der Lösungen.

Anzahl der Lösungen:

$D = 0$: eine Lösung

$D > 0$: zwei Lösungen

$D < 0$: keine reelle Lösung

Beachte: Eine quadratische Gleichung in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ musst du zuerst in die Normalform überführen (alle Summanden durch a dividieren), bevor du die p-q-Formel anwenden kannst!

$6x^2 - 12x - 18 = 0 \;|:6$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 + \sqrt{4} = 3$

$x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 + 3} = 1 - \sqrt{4} = -1$

$x_1 = 3;\; x_2 = -1$

WISSEN

ÜBUNG 1 **Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen. Verwende gegebenenfalls auch das Wissen aus dem Wissen+-Kasten unten.**

a) $x^2 - 16 = 0$
b) $5a^2 = 25$
c) $(y - 2) \cdot (y + 2) = 0$
d) $u \cdot (u - 3) = 0$
e) $7x^2 + 28x = 0$
f) $4z^2 = 8z$

WISSEN +

Rechenabkürzung für $x^2 - q = 0$
Kennst du den Begriff „Betrag einer Zahl“, so verwende diesen kurzen Rechenweg:

$x^2 = q$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}$

$|x| = \sqrt{q}$

$x_1 = +\sqrt{q}$; $x_2 = -\sqrt{q}$; $L = \{\sqrt{q}; -\sqrt{q}\}$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$|x| = \sqrt{16}$

$x_1 = +\sqrt{16}$; $x_2 = -\sqrt{16}$; $L = \{4; -4\}$

ÜBUNG 2 **Ein schmales rechteckiges Gartenstück hat die Seitenlängen 2,5 m und 8,1 m. Berechne die Seitenlängen eines quadratischen Gartenstücks, das den gleichen Flächeninhalt hat.**

WISSEN +

Satz von Vieta
Sind x_1 und x_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt:

$x_1 + x_2 = -p$ und $x_1 \cdot x_2 = q$

Mithilfe des Satzes von Vieta kannst du
- die **zweite Lösung** bestimmen, wenn dir eine Lösung bekannt ist (1),
- leicht eine **Probe** durchführen, wenn du die Lösungen einer quadratischen Gleichung bestimmt hast (2),
- **p und q** berechnen, wenn du die Lösungen, aber nicht die Gleichung kennst. Damit kannst du schließlich eine **Gleichung aufstellen** (3).

(1) Bestimme die zweite Lösung der Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$; du kennst $x_1 = 2$. Es gilt: $2 + x_2 = -1$ und $2 \cdot x_2 = -6$;

es folgt: $x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

(2) Prüfe, ob $x_1 = 7$ und $x_2 = -1$ Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 6x - 7 = 0$ sind:
$7 + (-1) = 6$ und
$7 \cdot (-1) = -7$
(3) Stelle eine quadratische Gleichung auf, deren Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 1{,}5$ sind.
$2 + 1{,}5 = 3{,}5$; also $p = -3{,}5$ und
$2 \cdot 1{,}5 = 3$; also $q = 3$
Die Gleichung in der Normalform lautet: $x^2 - 3{,}5x + 3 = 0$

ÜBUNG 3 **Gegeben ist die Gleichung $x^2 - 8x - 9 = 0$. Eine Lösung ($x_1 = -1$) ist bekannt. Bestimme mithilfe des Satzes von Vieta die zweite Lösung.**

ÜBUNG 4 **Löse die Gleichung mithilfe der quadratischen Ergänzung.**

$$x^2 + 8x - 20 = 0 \quad | + \square$$

$$x^2 + 8x = 20 \quad | + \square \qquad \text{(quadratische Ergänzung)}$$

$$x^2 + 8x + 16 = 20 + 16 \qquad \text{(1. binomische Formel)}$$

$$(x + \square)^2 = 36 \quad | - 36$$

$$(x + \square)^2 - 6^2 = 0 \qquad \text{(3. binomische Formel)}$$

$$[(x + 4) + \square] \cdot [(x + 4) - \square] = 0$$

$$[(x + 4) + \square] = 0 \text{ oder } [(x + 4) - \square] = 0$$

$$x = \square \text{ oder } x = \square$$

ÜBUNG 5 **Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung.**

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b) $x^2 + 8x = -12$

WISSEN

Zerlegung in Linearfaktoren
Jede quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit den Lösungen x_1 und x_2 lässt sich in **Linearfaktoren** zerlegen: $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
Diese Schreibweise einer quadratischen Gleichung heißt **Produktdarstellung**.

Zerlege die quadratische Gleichung $x^2 - x - 12 = 0$ in Linearfaktoren. Mithilfe der p-q-Formel berechnest du:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 12}$$

$$x_1 = 0{,}5 + \sqrt{12{,}25} = 4$$

$$x_2 = 0{,}5 - \sqrt{12{,}25} = -3$$

Du erhältst:
$x^2 - x - 12 = (x - 4) \cdot (x + 3) = 0$

ÜBUNG 6 **Löse die quadratischen Gleichungen mithilfe der p-q-Formel. Gib die quadratische Gleichung auch in Produktdarstellung an. Beachte: Gegebenenfalls musst du einen gemeinsamen Faktor vor der Zerlegung ausklammern.**

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

$L = \{\square ; \square\}$

$x^2 + 6x + 5$

$= (x \;\square\;) \cdot (x \;\square\;)$

b) $12x^2 - 24x = 36$

$L = \{\square ; \square\}$

$12x^2 - 24x - 36$

$= 12 \cdot (x \;\square\;) \cdot (x \;\square\;)$

ÜBEN

1.2 Graphen quadratischer Funktionen

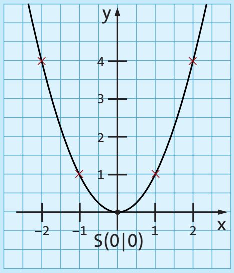
Eine Funktion, deren Funktionsgleichung durch Äquivalenzumformungen in die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) gebracht werden kann, **heißt quadratische Funktion.** Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel.**

Schreibweisen:
Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Normalform: $f(x) = x^2 + px + q$
Scheitelpunktform: $f(x) = (x - d)^2 + e$

$f(x) = x^2$ ($a = 1$; $b = 0$; $c = 0$)
Der Graph dieser Funktion heißt **Normalparabel** und ist
- nach oben geöffnet,
- achsensymmetrisch zur y-Achse, d. h., $f(-x) = f(x)$,
- links von der y-Achse (also für $x < 0$) monoton fallend, rechts von der y-Achse (also für $x > 0$) monoton steigend.

Scheitelpunkt: S (0|0)
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graph zu $f(x) = x^2$



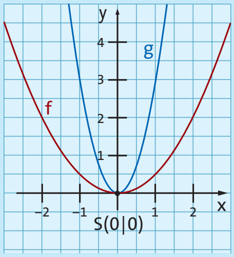
x	f(x)
0	0
1	1
2	4

$f(x) = a \cdot x^2$
Der Graph entsteht durch **Stauchung** oder **Streckung** der Normalparabel um den Faktor a:
- für $a > 1$: **gestreckt** (Parabel enger)
- für $0 < a < 1$: **gestaucht** (Parabel weiter)

Scheitelpunkt: S (0|0)
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Für $a < 0$ ist der Graph zusätzlich zur Streckung oder Stauchung gespiegelt an der x-Achse. In diesem Fall ist S der **höchste Punkt** des Graphen.

Graphen zu $f(x) = 0{,}5x^2$ und $g(x) = 3x^2$



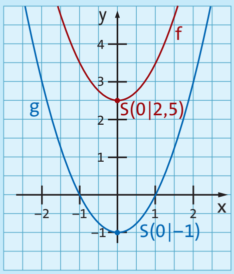
x	f(x)	g(x)	x^2
0	0	0	0
1	0,5	3	1
2	2	12	4
−1	0,5	3	1

· 3
· 0,5

$f(x) = x^2 + c$
Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel um c Einheiten **entlang der y-Achse.**
- Für $c > 0$: Verschiebung **nach oben**
- Für $c < 0$: Verschiebung **nach unten**

Scheitelpunkt: S (0|c)
S ist der **tiefste Punkt** des Graphen.

Graphen zu $f(x) = x^2 + 2{,}5$ und $g(x) = x^2 - 1$



x	f(x)	g(x)	x^2
0	2,5	−1	0
1	3,5	0	1
2	6,5	3	4
−1	3,5	0	1

−1
+2,5

WISSEN

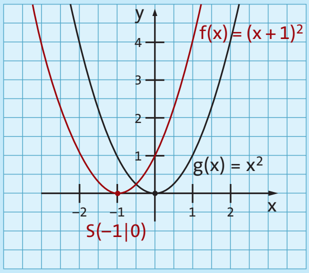
WISSEN

$f(x) = (x - d)^2$
Der Graph entsteht durch **Verschiebung** der Normalparabel entlang der x-Achse.
- Für $d > 0$: Verschiebung nach rechts
- Für $d < 0$: Verschiebung nach links

Scheitelpunkt: $S(d|0)$

Merke: Der Funktionsterm lässt sich in die Normalform überführen:
$(x - d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$

Graph zu $f(x) = (x + 1)^2$



x	f(x)	x^2
0	1	0
1	4	1
2	9	4
−1	0	1

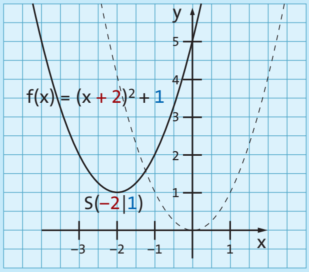
$(x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1) = x^2 + 2x + 1$

Scheitelpunktform: $f(x) = (x - d)^2 + e$
Der Graph entsteht durch Verschiebung der Normalparabel entlang der x-Achse und entlang der y-Achse.

Du kannst den Scheitelpunkt der Parabel direkt aus dem Funktionsterm ablesen:
Scheitelpunkt: $S(d|e)$

Merke: Der Funktionsterm lässt sich durch Ausmultiplizieren in die Normalform überführen:
$(x - d)^2 + e = x^2 - 2dx + (d^2 + e)$

Graph zu $f(x) = (x + 2)^2 + 1$



x	f(x)
0	5
1	10
2	17
−1	2
−2	1

$(x + 2)^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 + 1 = x^2 + 4x + 5$

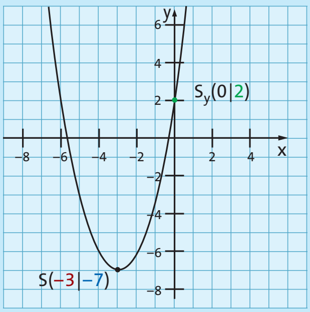
Normalform: $f(x) = x^2 + px + q$
Hier kannst du den Schnittpunkt mit der y-Achse gut ablesen: $S_y(0|q)$.
Die Normalform einer quadratischen Funktion kann in die Scheitelpunktform überführt werden:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + q + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$$

Scheitelpunkt: $S\left(-\frac{p}{2}\middle|q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$

Merke: Du kannst den Scheitelpunkt also direkt aus der Funktionsgleichung ablesen.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 2 &= x^2 + 2 \cdot 3x + 2 + 3^2 - 3^2 \\ &= (x + 3)^2 + 2 - 3^2 \\ &= (x + 3)^2 - 7 \end{aligned}$$



Allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0|c)$

Scheitelpunkt: $S\left(\frac{-b}{2a}\middle|\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

Mit dieser Formel kannst du den Scheitelpunkt einer Parabel immer berechnen.

$f(x) = 2x^2 + 8x + 1$

$S\left(-\frac{8}{4}\middle|\frac{4 \cdot 2 \cdot 1 - 8^2}{4 \cdot 2}\right)$

Scheitelpunkt: $S(-2|-7)$

ÜBUNG 7 **Gib zu jedem Funktionsterm den Scheitelpunkt S an. Ordne nun die Funktionsgleichungen den Graphen zu.**

a) $f_1(x) = x^2$
S(|)
Graph:

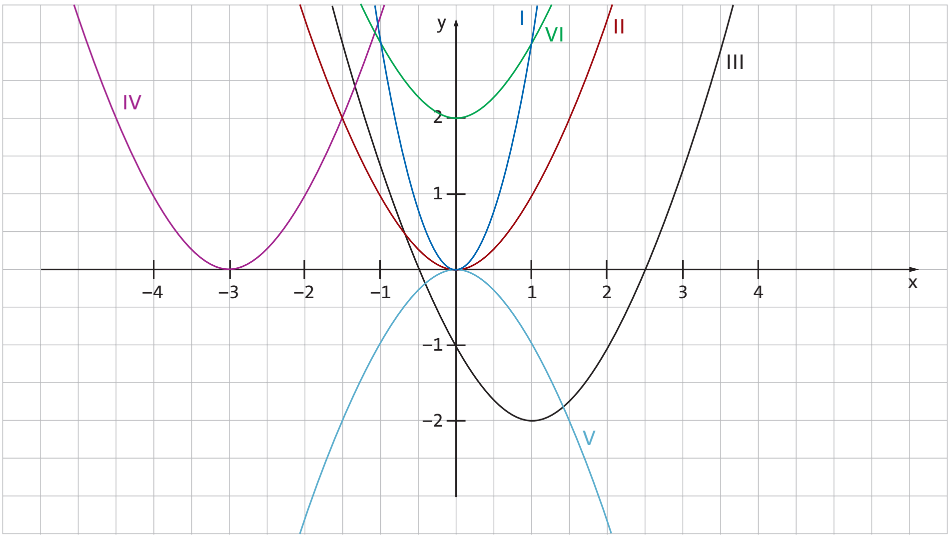
b) $f_2(x) = x^2 + 2$
S(|)
Graph:

c) $f_3(x) = 3x^2$
S(|)
Graph:

d) $f_4(x) = -x^2$
S(|)
Graph:

e) $f_5(x) = (x + 3)^2$
S(|)
Graph:

f) $f_6(x) = (x - 1)^2 - 2$
S(|)
Graph:



ÜBUNG 8 **Erstelle zu jeder Funktion eine Wertetabelle und zeichne ihren Graphen in dein Übungsheft. Gib jeweils auch den Scheitelpunkt an.**

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ b) $g(x) = 2x^2 - 1$ c) $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ d) $i(x) = x^2 + 3x + 2{,}25$

ÜBUNG 9 **Gegeben sind Wertetabellen von Funktionen. Zeichne die jeweiligen Graphen und gib die zugehörigen Funktionsterme an.**

a)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

b)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	1	−2	−3	−2	1	6	13

ÜBEN

ÜBUNG 10 **Forme die Funktionsgleichungen in die Scheitelpunktform um und gib den Scheitelpunkt an.**

a) $f(x) = 2x^2 + 8x + 10$ b) $f(x) = 4x^2 + 20x - 16$ c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 12x + 72{,}25$

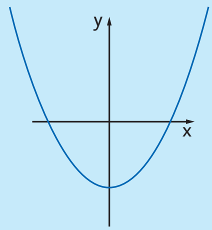
WISSEN

Nullstellenbestimmung
$f(x) = x^2 + px + q$
Neben dem Scheitelpunkt und dem Schnittpunkt mit der y-Achse sind noch die Schnitt- und Berührungspunkte $(x_1|0)$ und $(x_2|0)$ des Funktionsgraphen mit der x-Achse von besonderem Interesse.

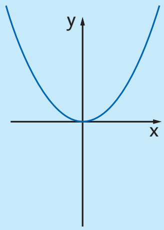
Die Werte x_1 und x_2 dieser Schnitt- oder Berührungspunkte heißen **Nullstellen** der Funktion.
Die Nullstellen sind also diejenigen x-Werte, für die die y-Koordinate null ist bzw. für die $f(x) = 0$ gilt.
Zur Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Funktion setzt man $y = f(x) = 0$ und löst die entstandene quadratische Gleichung (↗ Kap. 1.1).

Die Diskriminante $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ „entscheidet" über die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung und somit auch über die Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion.

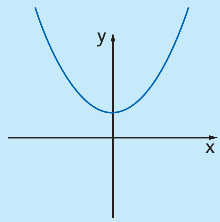
Aus der Anschauung des Funktionsgraphen wird klar: es gibt entweder eine, zwei oder keine Nullstelle:



$D > 0$
zwei Nullstellen



$D = 0$
eine Nullstelle



$D < 0$
keine Nullstelle

ÜBUNG 11 **Berechne die Nullstellen der Funktionen.**

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = 4x^2 - 40x + 112$ c) $f(x) = x^2 - 1{,}5x - 4{,}5$

ÜBUNG 12 **Gegeben sind jeweils die Nullstelle(n) und der Scheitelpunkt des Graphen einer quadratischen Funktion. Gib den zugehörigen Funktionsterm an.**

a) $x_1 = 0$; $x_2 = 6$ $S(3|-2)$ b) $x_1 = x_2 = 3$ $S(4|-1)$

ÜBUNG 13 **Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 + 8x + 10k$. Bestimme k derart, dass die Funktion eine (zwei bzw. keine) Nullstelle(n) besitzt.**

ÜBUNG 14 **Eine quadratische Funktion nimmt an der Stelle $x = 2$ den Wert 3 an und hat ihr Minimum bei $f(0) = -2$. Bestimme die Funktionsgleichung für f(x).**

1.3 Quadratwurzelgleichungen und Quadratwurzelfunktionen

Quadratwurzelgleichungen

Du erinnerst dich: Die **Quadratwurzel** (kurz: Wurzel) aus einer nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl c, deren Quadrat a ergibt: $c^2 = a$
Wir schreiben für c auch: $c = \sqrt{a}$

$(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$

Wurzel aus 9 ist diejenige nicht negative Zahl, deren Quadrat 9 ergibt.

Eine Gleichung, in der die Variable unter einem Wurzelzeichen vorkommt, heißt **Wurzelgleichung.**

Vorsicht: Der Term unter der Wurzel darf nie kleiner als null werden! Du musst also genau auf die Definitionsmenge achten!

$\sqrt{x+7} - 3 = 0$; $D = \{x \mid x \geq -7\}$

$8 - \sqrt{x-60} = 0$; $D = \{x \mid x \geq 60\}$

Wurzelgleichungen in 4 Schritten lösen:
1. Wurzel **isolieren**;
2. beide Seiten der Gleichung **quadrieren;**
3. Variable (oder weitere Wurzel) **isolieren;**
4. Probe durchführen; Lösungsmenge angeben.

Vorsicht: Die Probe musst du durchführen, da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist. Du kannst „Ergebnisse“ erhalten, die die Gleichung nicht lösen!

Kommen mehrere Wurzeln vor, so musst du das Schema isolieren, quadrieren, isolieren, quadrieren, … mehrfach anwenden.

$\sqrt{x+7} - 3 = 0 \quad | +3$ (Wurzel isolieren)

$\sqrt{x+7} = 3 \quad |$ quadrieren

$x + 7 = 9 \quad | -7$ (Variable isolieren)

$x = 2$

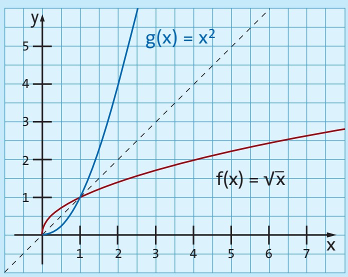
$L = \{2\}$

Probe: $\sqrt{2+7} - 3 = 0$

Die Gleichung $\sqrt{x-6} + 2 = 0$ hätte nach dem obigen Schema berechnet die „Lösung“ $x = 10$; dies ist aber keine Lösung der Gleichung. Führe die Probe in der Ausgangsgleichung durch: $2 + 2 \neq 0$.

Die Quadratwurzelfunktion

Die **Quadratwurzelfunktion** $f(x) = \sqrt{x}$; $x \geq 0$ ist die Umkehrfunktion zu $g(x) = x^2$ für $x \geq 0$.
Der Graph der Quadratwurzelfunktion ist im Bereich nicht negativer x-Werte achsensymmetrisch zum Graphen der Funktion $g(x) = x^2$. Symmetrieachse ist die Winkelhalbierende des 1. Quadranten (↗ Kap. 2.4).



ÜBUNG 15 **Vereinfache die Wurzelterme.**

a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

b) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{5})$

c) $(\sqrt{5} + 6 \cdot \sqrt{8}) \cdot (\sqrt{5} - 6 \cdot \sqrt{8})$

d) $\sqrt{110} - \sqrt{11} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{11})$

e) $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2$

f) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

ÜBUNG 16 **Gib die Definitionsmenge der Terme an.**

a) $\sqrt{12 - 3x}$

$D = \{x|$ $\}$

b) $\sqrt{16 - x^2}$

$D = \{x|$ $\}$

c) $\sqrt{2x + 19}$

$D = \{x|$ $\}$

ÜBUNG 17 **Berechne die Lösungsmenge. Führe eine Probe durch.**

a) $\sqrt{x} = 9$

$L = \{$ $\}$

b) $4 = \sqrt{6 + 4x}$

$L = \{$ $\}$

c) $5 + 4 \cdot \sqrt{2 - 3x} = 21$

$L = \{$ $\}$

d) $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{2x + 8}$

$L = \{$ $\}$

e) $x + 3 = \sqrt{x^2 + 18}$

$L = \{$ $\}$

f) $2x + 2 \cdot \sqrt{4x^2 - 6} = 0$

$L = \{$ $\}$

ÜBEN

ÜBUNG 18 **Berechne die Lösungsmenge durch mehrfaches Quadrieren. Schreibe in dein Übungsheft.**

a) $\sqrt{4x + 9} = 1 + 2 \cdot \sqrt{x}$

b) $\sqrt{10 - x} = 4 - \sqrt{x}$

c) $3 + \sqrt{x - 21} = \sqrt{x}$

ÜBUNG 19 **Zeichne mithilfe einer Wertetabelle den Graphen der Funktion $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$. Lies aus dem Graphen ab, für welche Werte $f(x) = x$ gilt.**

Wertetabelle:

x	0	0,5	1	2	3	4	5
f(x)							

ÜBUNG 20 **Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen für beliebiges $t \in \mathbb{R}$. Gib an, für welche Werte von t die Gleichung lösbar ist.**

a) $\sqrt{x} - t = 0$

$L = \{$ $\}$

$t \geq$

b) $\sqrt{x} = -t$

$L = \{$ $\}$

t

c) $\sqrt{x + 2} - t = 0$

$L = \{$ $\}$

t

60 Minuten

KLASSENARBEIT 1

AUFGABE 1 **Löse die Gleichungen. Durch „genaues Hinschauen“ kannst du sehr schnell die Lösungsmenge bestimmen.**

a) $x^2 = 25$

L = { }

b) $3x^2 = -60$

L = { }

c) $(x-5)^2 = 36$

L = { }

d) $4 \cdot (x+2)^2 = 64$

L = { }

e) $x^2 - 8x = 0$

L = { }

f) $x^2 = \frac{4}{36}$

L = { }

AUFGABE 2 **Löse die Gleichungen mithilfe der quadratischen Ergänzung. Bringe die Gleichungen gegebenenfalls zuerst in die Normalform.**

a) $x^2 + 6x + 8 = 15$

b) $2x^2 - 40 = 16x$

c) $(x-1)(x+1) = 2x$

d) $(x+1)(x-3) = 5$

AUFGABE 3 **Löse die Gleichungen mithilfe der p-q-Formel.**

a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

b) $-y^2 + y + 6 = 0$

c) $u^2 = 4u - 3$

AUFGABE 4 **Gib die Informationen an, die man aus den Funktionsgleichungen ablesen kann.**

Funktion / Parabel	$f(x) = x^2 - 2$	$g(x) = -\frac{1}{2}x^2$	$h(x) = (x-3)^2 + 2$
Scheitelpunkt			
Schnittpunkte mit der x-Achse			
nach oben/ unten geöffnet			
weiter/enger als Normalparabel			
Schnittpunkt mit y-Achse			

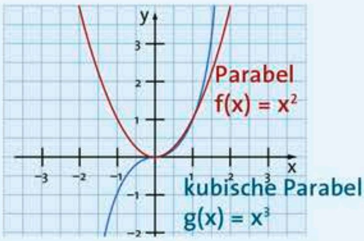
TESTEN

Stichwortfinder

Funktionen im Überblick

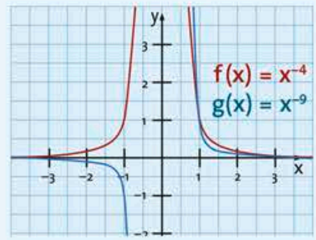
Potenzfunktion (I)

$f(x) = x^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, n > 0$



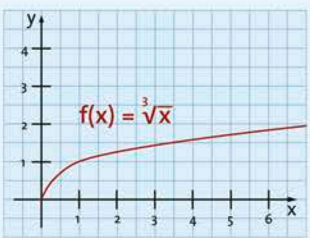
Potenzfunktion (II)

$f(x) = x^n,\ x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}, n < 0$



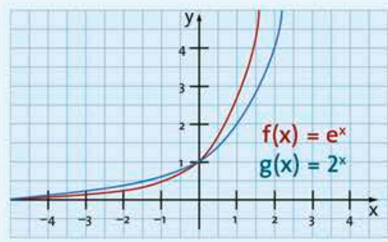
Wurzelfunktion

$f(x) = \sqrt[n]{x^m}; x \geq 0; m, n \in \mathbb{N}; m \geq 1; n \geq 2$



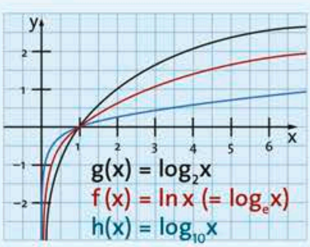
Exponentialfunktion

$f(x) = a^x, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, a > 0$



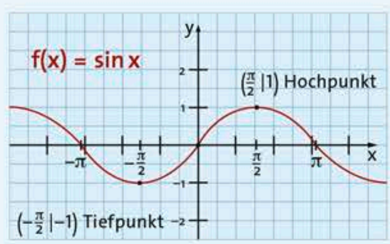
Logarithmusfunktion

$f(x) = \log_a x; a, x \in \mathbb{R}; a, x > 0; a \neq 1$



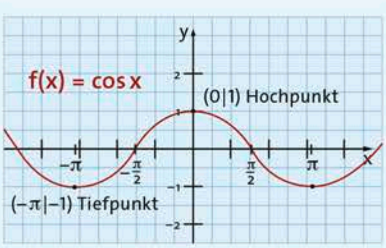
Sinusfunktion

$f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$



Cosinusfunktion

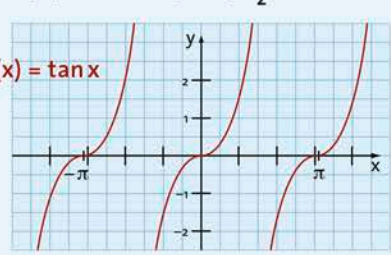
$f(x) = \cos x, x \in \mathbb{R}$



Tangensfunktion

$f(x) = \tan x;$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{R}; x \neq (2z + 1) \cdot \frac{\pi}{2}\}; z \in \mathbb{Z}$



Prozentrechnung und Zinsrechnung

Prozentrechnung

Prozentsatz p %
Anteil vom Grundwert

$$p = \frac{W \cdot 100}{G}$$

Prozentwert W
Wie viel vom Grundwert?

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

Grundwert G
Grundwert ≙ 100 %

$$G = \frac{W \cdot 100}{p}$$

Zinsrechnung ist Prozentrechnung mit anderen Begriffen.

Zinsrechnung

Zinssatz p %

$$p = \frac{Z \cdot 100}{K}$$

Zinsen Z
(Jahreszinsen)

$$Z = \frac{K \cdot p}{100}$$

Kapital K

$$K = \frac{Z \cdot 100}{p}$$

Tageszinsen

$$Z_t = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

Monatszinsen

$$Z_m = \frac{K \cdot p \cdot m}{100 \cdot 12}$$

Kapital K_n
nach n Jahren
(Zinseszins)

$$K_n = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Beachte: Banken rechnen mit 30 Tagen pro Monat und mit 360 Tagen pro Jahr.

DUDEN

Für nur 1,– Euro!
Das passende
digitale Lernpaket
www.lernhelfer.de/wuet

10. Klasse • Mathematik

Mit dabei: Schlaue Schnipsel – Mathewissen
zum Staunen, Lachen und Weitererzählen

Bessere Noten in drei Schritten:

- WISSEN: Alle Regeln, alle Merksätze, alle Lerninhalte
- ÜBEN: Viele Übungen von leicht bis richtig knifflig
- TESTEN: Training für den Ernstfall – mit Klassenarbeiten wie in der Schule

Mit separatem Lösungsheft.

Geeignet für alle Bundesländer.
Für Gymnasium, Realschule und Gesamtschule.

Auf die aktuellen Bildungspläne abgestimmt.

ISBN 978-3-411-72584-7
13,99 € (D) · 14,40 € (A)
9 783411 725847